

北江流域径流时间序列的分形特征解析*

陶 谨^{1,2}, 陈晓宏^{1,3}, 汪丽娜⁴, 谢毅文⁵

(1. 中山大学 水资源与环境研究中心, 广东 广州 510275;

2. 广东省东莞市水务局, 广东 东莞 523888;

3. 华南地区水循环与水安全广东省教育厅重点实验室, 广东 广州 510275;

4. 华南师范大学 地理科学学院, 广东 广州 510631;

5. 东莞理工学院 化学与环境工程学院, 广州 东莞 523808)

摘 要: 径流时间序列具有非线性、复杂性和不确定性的特征, 运用 R/S 分析法、多重分形方法对北江流域石角站 1954 - 2006 年的年平均径流量时间序列进行研究, 解析其分形的特征。结果表明: 北江流域石角站的 Hurst 指数远大于 0.5, 说明北江流域年平均径流时间序列具有明显的趋势性成分, 即北江流域年平均径流量具有明显的持久性和长期记忆特性。结合 V 统计说明, 北江流域的年平均径流量的持久性经过 15 ~ 20 年之后会消失。根据多重分形方法, 通过对幂谱和统计矩函数的分析, 得出北江流域石角站年平均径流量时间序列的无标度性, 借助分配函数、广义分形维数和多重分形谱对年平均径流量的研究, 表明北江流域石角站多年平均径流量具有多重分形的特征, 为北江流域径流的预测工作的做了重要的铺垫。

关键词: 年平均径流量; 分形性; 长程记忆; 多重分形

中图分类号: TV141 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529 - 6579 (2011) 05 - 0148 - 05

Study on Fractal Characteristics of Runoff Time Series in the Beijiang River

TAO Jin^{1,2}, CHEN Xiaohong^{1,3}, WANG Lina⁴, XIE Yiwen⁵

1. Center for Water Resources and Environment, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;

2. Dongguan Water Authorities, Dongguan 523888, China;

3. Key Laboratory of Guangdong Provincial Water and Water Security in South China,
Guangzhou 510275, China;

4. School of Geography Science, South China Normal University, Guangzhou 510631, China;

5. College of Chemistry and Environment Engineering, Dongguan Institute of
Technology, Dongguan 523808, China)

Abstract: The runoff time series is characterized by complexity and uncertainty. R/S analysis and multifractal method were used to analyze the data collected from 1954 to 2006 at Shijiao hydrology station of the Beijiang River in this paper. Results show that the Hurst index of Shijiao station is largely higher than 0.5, indicating that the average annual runoff time series has obvious trend components, namely the average annual runoff of the Beijiang River shows obvious durability and long-term memory. According to the V statistical value, the average annual runoff persistence will disappear after 15 - 20 years. Using the multifractal method, the power spectrum and statistical moment function were analyzed. The average annual runoff of the Beijiang River is of multi-fractal features. These results are important for the runoff

* 收稿日期: 2010 - 10 - 16

基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目 (50839005), 广东省科技厅资助项目 (2010B050300010), 广东省水利科技创新项目 (2009 - 39), 中英瑞气候变化适应项目 (ACCC/20100705 - 1), 中山大学重大项目培育和新兴交叉学科项目 (10lgzd11), 国家重点基础研究发展计划 (973) 资助项目 (2010CB428405)

作者简介: 陶谨 (1970 年生), 男, 博士研究生; 通讯作者: 陈晓宏; E-mail: eescxh@mail.sysu.edu.cn

forecasting.

Key words: the average annual runoff; Fractal feature; long-term memory; multifractal

径流作为水文循环中重要的子要素，受多种因素的影响，加上人类活动的影响，使得径流时间序列表现出高度的非线性、复杂性和不确定性的特征。因此，传统的非线性方法很难将径流时间序列的内部表征进行较为全面的描述和研究。但非线性动力学的研究表明，一些看起来貌似随机的过程实际并不是随机的而是混沌的，具有某种内在的分形特征。随着混沌、分形理论引入到水文、气象学科中，人们逐渐认识到径流时间序列并非是纯随机过程，今天的径流量受到昨天的径流信息量的影响，本文采用 R/S 分析方法证实径流时间序列的长程相关性。由于多重分形（也称为分形测度）研究的是一种物理量在一个支体或支集上的分布状况^[1]，利用多重分形理论可提供定量刻划分形测度在支集上的分布状况，多重分形理论被广泛地应用在金融、地震、气象和水文上。本研究采用多重分形理论，进一步探究径流时间序列的分形性。

北江，是珠江的三大支流之一，分析北江流域控制站——石角站的径流时间序列的分形特征，不仅为北江流域的水资源综合利用提供理论依据，也为流域的可持续发展奠定研究基础。因此，本研究

以北江流域石角站为研究对象，根据 1954 - 2006 年的径流资料序列，采用 R/S 分析方法和多重分形理论研究石角站 53 年各年年平均径流量的分形特征。

1 研究方法

1.1 R/S 方法和 V 统计计算方法

R/S 方法：上世纪 50 年代，英国水文学专家 Hurst 在研究尼罗河的水库流量与水库储存能力的关系时，提出一种 R/S 的非参数统计分析方法^[2-4]，从而给出了一种判别时间序列是否对时间有依赖的统计量^[5-7]。在此基础上，Hurst 发现许多自然界现象的统计能很好的由有偏的随机游走来刻画，芒德勃罗特^[8]也在上世纪 60、70 年代对此进行了广泛的探讨，并把它们称为分数布朗运动，目前，大家普遍称之为分形时间序列^[9]。

其基本原理和方法^[10]一时间序列 $\xi(t), t = 1, 2, \dots, N$ ，将它划分为 $\text{int} [N/n]$ 个，时间长度为 n 的独立时间序列，对于第 m 个时间序列样本，时间序列的特征值如表 1 所示。

表 1 时间序列的特征值
Table 1 Eigenvalues of time series

项目	均值	累积离	极差	标准差
计算式	$\bar{\xi}(m) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \xi(t)$	$\xi'(t, m) = \sum_{k=1}^i (\xi(t, m) - \xi_m)$	$R(m) = \max_{1 \leq t \leq n} \bar{\xi}(m) - \min_{1 \leq t \leq n} \bar{\xi}(m)$	$S(m) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [\xi(t) - \bar{\xi}(m)]^2}$

设一时间序列 $\xi(t), t = 1, 2, \dots, N$ ，是相互独立、方差有限的随机序列，即布朗运动。赫斯特和费勒证明了，如果存在：

$$R/S \propto (n)^H \tag{1}$$

则说明所分析的时间序列存在赫斯特现象，H 称为赫斯特指数。假设 R 和 S 之间的正比系数为 C，则：

$$\lg(R/S) = \lg C + H \lg n \tag{2}$$

利用最小二乘法回归求出斜率，便是 Hurst 指数，即式 (2) 中 H 的值。

V 统计值的计算方法：通过绘制 $\lg(R/S)$ 与 $\lg n$ 的图形可以估计时间序列的非周期循环性，对于 R/S 分析的 \log/\log 图，每一个循环的结尾，就是下一个循环的开始，通过寻找图中的转折点，可

以估计何处发生突变，进一步可以估算出平均循环的长度。V 统计得计算方法，最初有 Hurst 在 1951 年用于检验稳定性，它可以给出更加精确的算出循环长度的度量值，统计值 V 的计算式，如下式所示：

$$V = (R/S)/n^{\frac{1}{2}} = Cn^H/n^{\frac{1}{2}} = Cn^{H-\frac{1}{2}} \tag{3}$$

1.2 多重分形模型

多重分形是通过一个谱函数来描述分形结构上不同的局域条件、或分形结构在演化过程中不同层次所导致的特殊的结构行为与特征，是从系统的局部出发来研究其整体的特征，并借助统计物理学的方法来讨论特征参量的概率测度的分布规律。

对于时间序列 $x(t), t \in [0, T]$ ，幂谱在无标度区间内满足如下关系：

$$E(\omega) \propto \omega^{-\beta} \quad (4)$$

其中, $\omega = 1/T$, 表示为频率, β 是指数 (又称幂谱指数)。满足幂律的频率区间及相应的时间区间作为分形关系成立的尺度区间。在无标度区间内, 研究对象具有无标度性, 即具有自相似性, 表明研究对象在形状、性质或其他方面是自相似的。

如果在分形体中, 具有相同 α 值的小区域数目为 N_α , 则:

$$N_\alpha(r) \sim r^{-f(\alpha)} \quad (5)$$

因此, $f(\alpha)$ 就是用指数 α 所标征的子区域构成的子集的分维数。对于复杂的分形体, 其内部可用一系列不同 α 值表示的子集, 相同的 α 值, 具有相同的奇异程度。因此, 知道了 $f(\alpha)$ 是 α 的某一函数, 就确定了这一系列子集的分形特征。且有:

$$\max f(\alpha) = D \quad (6)$$

对于均匀分形, $f(\alpha) = \alpha = D_0$, $f(\alpha)$ 在 $f \sim \alpha$ 平面上只是一个点。

若统计矩具有如下形式:

$$M(\lambda, q) \propto \lambda^{\tau(q)} \quad (7)$$

式中, $\tau(q)$ 被称为配分函数, 若 $\tau(q)$ 是 q 的非线性函数, 则时间序列是多重分形的, $\tau(q)$ 若是 q 的线性函数, 则对应的随机过程是单分形过程。

从信息论角度, 当 $r \rightarrow 0$ 时, 得到:

$$I_q(r) = Cr^{-(1-q)D_q} \quad (8)$$

式中, $I_q(r) = \sum_{i=1}^n P_i^q$ 为 q 次几率矩, D_q 为 q 次广义分维数, q 次表征多重分形不均匀程度的量, C 称为比例常数且大于零, 式 (8) 称为多重分形模型^[11-12]。

2 结果与分析

对于年平均径流量过程, 其 R/S 分析图和 V 统计图如图 1 和图 2 所示。图 1 表明, 北江流域石角站年平均径流量的 $\lg(n)$ 和 $\lg(R/S)$ 的相关性很强, 年平均流量的 Hurst 指数大于 0.8, 意味着北江流域的年平均径流量时间序列未来的趋势与过去一致, 即北江流域的径流过程具有长程相关性。而 V 统计量 (图 2) 在刚开始的时候平稳上升, 当 $\lg n$ 达到一定值后, 统计值 V 开始上下波动, 年平均径流量平稳上升与波动的临界点为 $1.2 < \lg n < 1.3$, 说明该流域年平均径流量有着很强的持续性, 且年平均径流量过程不是随机游动的, 具有分形分布特征, 即今天发生的产生的径流量将对以后的径流量产生影响。而这样的持久性不是永久的, 经过 15.8489 (年) $< n < 19.9526$ (年) 年

之后会消失。

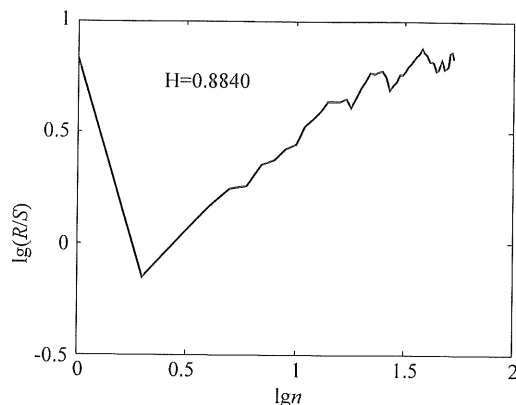


图 1 年平均径流量的 R/S 分析图
Fig. 1 R/S analysis of average annual runoff

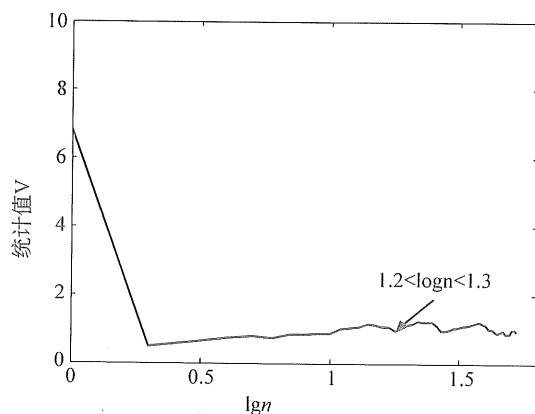


图 2 年平均径流量的 V 统计图
Fig. 2 Statistic V of average annual runoff

北江流域年平均径流量的多重分形谱见图 3-6, 以年平均径流量的幂谱与频率之间的曲线为例, 图 3 表明年平均径流量的 $\lg E(\omega)$ 与 $\lg(\omega)$ 之间成正比, 且正比系数 (a) 的绝对值为 0.9143, 即相应于幂谱与频率之间的关系式的指数 β , 说明年平均径流量具有无标度性。进一步分析年平均径流量在其无标度范围内的多重分形性, 由统计矩, 即配分函数的定义可知, 配分函数分析的分析方法可以判断研究对象是否具有多重分形的特性, 年平均径流量序列的配分函数图可以有效地判别年平均径流量是否具有分形特征, 如图 4 所示。图 4 为 q 取不同值时 $\lg(\lambda) \sim \lg(x_q(\lambda))$ 的曲线簇, 最上面的曲线所代表的 q 值为 -50, 最下面的曲线所代表的 q 值为 50, 从上至下依次为 -50、-37.5、-25、-12.5、0、12.5、25、37.5 和 50。 $\lg(\lambda) - \lg(x_q(\lambda))$ 曲线图表明, 当 $q > 0$ 时, 北江流

域年平均径流量的 $\lg(\lambda) - \lg(x_q(\lambda))$ 曲线呈现良好的线性关系；尽管当 $q < 0$ 时，年平均径流量的 $\lg(\lambda) \sim \lg(x_q(\lambda))$ 曲线有微小的波动，但整个尺度范围内的变化仍旧表现出较好的线性关系。因此可以认为，北江流域的年平均径流量时间序列在相应的标度范围内，具有分形特征。

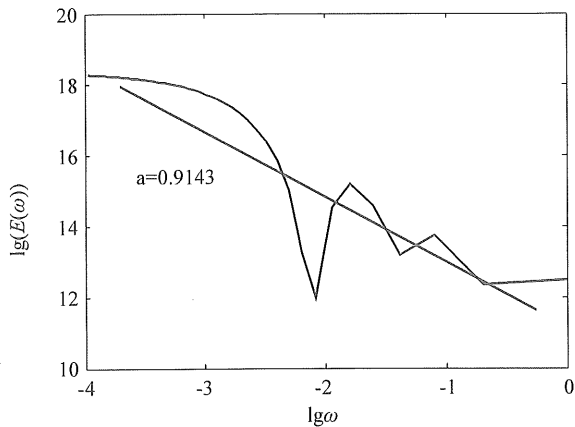


图 3 年平均径流量的幂谱与频率关系曲线
Fig. 3 Relation curve between power spectrum and frequency of average annual runoff

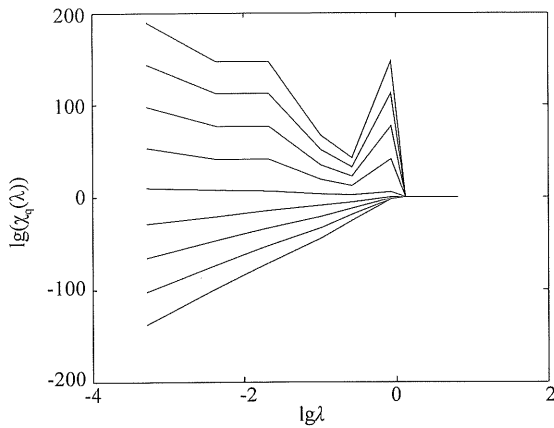


图 4 年平均径流量的 $\lg(\lambda) - \lg(x_q(\lambda))$ 关系曲线
Fig. 4 Relation curve between $\lg(\lambda)$ and $\lg(x_q(\lambda))$ of average annual runoff

北江流域年平均径流量的 $q \sim \tau(q)$ 的曲线图 (图 5) 表明年平均径流量的 $q \sim \tau(q)$ 曲线为凹向横轴的曲线， $q \sim \tau(q)$ 之间存在非线性关系。因此，进一步说明北江流域年平均径流量的时间序列具有多重分形结构特征。不同的 q 值具有不同尺度函数的 $\tau(q)$ 值，不同幅度的波动具有不同尺度关系，且 $\tau(q)$ 随着阶数 q 值的增加而增加，当 $q > 0$ 时， $\tau(q)$ 随着阶数 q 的增加的幅度变小。

图 6 为北江流域年平均径流量多重分形谱的 $\alpha \sim f(\alpha)$ 曲线， $\alpha \sim f(\alpha)$ 曲线表明，年平均径流量具有多重分形随机游走的特征。

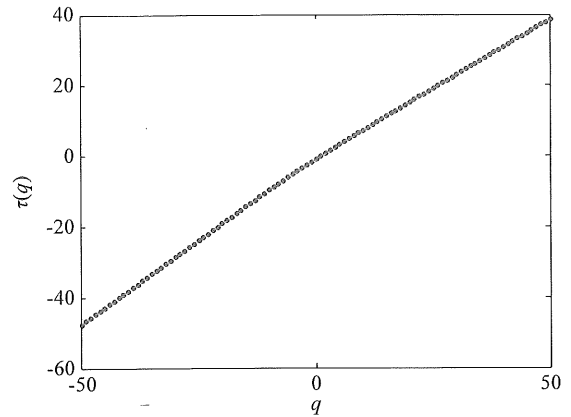


图 5 年平均径流量的 $q-\tau(q)$ 曲线图
Fig. 5 $q-\tau(q)$ curve of average annual runoff

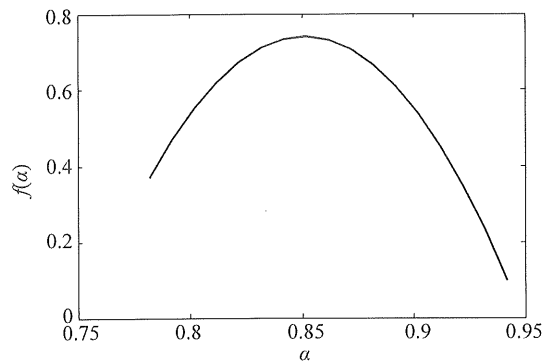


图 6 年平均径流量的多重分形谱
Fig. 6 Multi-fractal spectrum of average annual runoff

多重分形参数分别为：① $f(\alpha)_{\max} = 0.7769$ ， $\Delta\alpha = 0.1600$ ；②由于这年平均径流量的 $\alpha-f(\alpha)$ 曲线形状呈现非钟型，分别计算 $f(\alpha)$ 最大值左右两侧的 $\Delta f(\alpha)$ 分别为：0.5106、0.6330。③ $f(\alpha)$ 最大值左、右两侧最小值连线斜率的绝对值为：0.7653。以上 3 项多重分形参数表明，年平均径流量的 $\alpha-f(\alpha)$ 曲线反映出年平均径流量的内在动力学特征。上述分析表明，北江流域年平均径流量具有多重分形的特征。

4 结 论

通过对北江流域年平均径流量的研究，揭示了北江流域年平均径流量不是随机游动的，而是有偏随机游走的，具有分形特征。并且北江流域年平均流量的 Hurst 指数大于 0.5，表明北江流域年平均

流量具有极强的持续性,即具有长期记忆性和混沌特征。这是由于人类活动的影响、气候的变化等外部等因素的作用,加之外部力量具有非周期性循环的特点,使得北江流域年平均径流量的具有长程记忆性,其消失的时间约为 15-20 年。

根据多重分形的分析法,本文得出北江流域年平均流量具有多重分形的特征,且多重分形谱的参数变化较准确、精细地揭示了北江流域年平均流量时间序列分形结构复杂的动力学特征。应用分形广义维数和多重分形的原理,对北江流域年平均流量的时间序列进行科学的分析,对推动非线性数学分析理论在水文时间序列中的实际应用具有重要的意义。北江流域年平均流量的多重分形谱参数具有较明显的变化特征,表明北江流域年平均流量时间序列具有复杂的特性,这为进一步描述北江流域年平均流量的复杂性规律提供了依据。在今后的研究中,如何将这此规律与相应的预测模型相结合,以其对北江流域的年平均径流量进行较好的预测是下一步工作的重点。

参考文献:

- [1] 严绍瑾,彭永清,张运刚. 一维气温时间序列的多重分形研究[J]. 热带气象学报,1996,12(3):207-211.
- [2] HURST H E. The long-term storage capacity of reservoirs [J]. Transactions of the American Society of Civil Engineer, 1951,116: 770-799.
- [3] HURST H E, BLACK R P, SIMAIKA Y M. Long-Term storage: An Experimental Study[M]. London, 1965.
- [4] FEDER J. Fractals: Physics of Solids and Liquids [M]. New York: Plenum Press, 1988.
- [5] 汤龙坤. 太阳黑子数时间序列的 R/S 分析[J]. 华侨大学学报:自然科学版,2008,29(4):627-629.
- [6] 汪丽娜,陈晓宏,章四龙,等. 武江流域洪水时间序列的 R/S 分析[J]. 华南师范大学学报,2011(1):128-131.
- [7] 白萌,沈冰,孟海平,等. 宝鸡市降水和径流的分形特征与 R/S 分析[J]. 黑龙江水专学报,2009,36(4):6-10.
- [8] Mandelbrot B. The pareto-levy law and the distribution of income[J]. International Economic Review, 1960, (1): 79-106.
- [9] 张维,黄兴. 沪深股市的 R/S 实证分析[J]. 系统工程, 2001,19(1):1-5.
- [10] 周寅康,王腊春等. 淮河流域洪涝变化的混沌特征[J]. 自然灾害学报,1999,8(1):42-47.
- [11] 郭科,施泽进,唐菊兴,等. 用多重分形研究元素的共生组合性[J]. 电子科技大学学报,2004,33(2):221-224.
- [12] 胥泽银,郭科. 多元统计及其程序设计[M]. 成都:四川大学出版社,1999.